11.1.11 Goniometrické funkce

Předpoklady:

Př. 1: Převeď na radiány.
a) 45° b) 150° c) 300° d) 123°

Př. 2: Převeď na stupně.
a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{7\pi}{4}$ d) $1,4\pi$

Př. 3: Zopakuj si definici goniometrických funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$ pomocí jednotkové kružnice.

Př. 4: Načrtni grafy funkcí.
a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ b) $y = \cos 2x$ c) $y = \operatorname{tg}|x|$

Př. 5: Řešte v R (ve stupních i obloukové míře:
a) sinx = -0,8361 c) tg x = -0,8391

a) 236°44´+k.360°, 303°16´+k.360° b) 140°00´+k.180°

Př. 6: Vypočtěte hodnotu výrazu $\frac{3\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$, je-li tg x = -7 (bez určení úhlu x).

-10/11

Př. 7: Zjednodušte výrazy, určete podmínky:
a) $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1-\cos x}$ b) $\frac{\cos^2 2x - 1}{\sin^2 2x - 1}$ c) $\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$

a) $\frac{2}{\sin x}$ b) $\operatorname{tg}^2 2x$ c) 1

Př. 8: Vypočtěte sin 2x a cos 2x, je-li sin x = 0,6 a $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

cos 2x = 0,28 , sin 2x = 0,96

Př. 9: Dokažte, že pro pro přípustná x platí (stanovte podmínky):

b) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ d) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cos x} = 2$

f) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \frac{1 - 2\cos^2 x}{\sin x \cos x}$ h) $\frac{\sin 2x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \cos 2x} = 2\operatorname{cotg} x + 1$

Př. 10: Dokažte bez použití kalkulačky: $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Př. 11: Řešte v R: c) $\sqrt{3} - 2\cdot\cos x = 0$ e) $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$ g) $\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 2 + \sqrt{3}$

h) $\sin 2x = \cos 3x \cdot \sin 2x$ i) $2\sin^3 x - \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$

k) $\frac{2\cdot \operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2}$ n) $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{cotg} x + 3 = 0$

c) $K = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right\}$ e) $K = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; \frac{5}{12}\pi + \frac{k\pi}{2}\right\}$ g) $K = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi\right\}$

h) $K = \left\{k\frac{\pi}{2}; k\frac{2\pi}{3}\right\}$ i) $K = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\}$

k) $K = \{75° + k\cdot 180°; 15° + k\cdot 180°\}$ n) $K = \{26°34' + k\cdot 180°; 116°34' + k\cdot 180°\}$

Př. 12: Řeš v R: b) $\operatorname{cotg} x < 0$ c) $-1 \le \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ e) $|\operatorname{cotg} x| \le \sqrt{3}$

b) $K = \bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi\right)$ c) $K = \bigcup_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{1}{3}\pi + k\pi\right)$

e) $K = \bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi\right)$

Př. 13: Řešte v R: $|\cos 2x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$K = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right\}$

Př. 14: Řešte v R: a) $\text{tg}\ x + \text{cotg}\ 2x = \sin 2x$ b) $\cos x + 4\sin x = 4$

c) $\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 0$ d) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$

a) $K = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\}$ b) $K = \left\{2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right\}$ b) $K = \left\{90° + k \cdot 360°; 61°56' + k \cdot 360°\right\}$

c) $K = \left\{45° + k \cdot 180°; 81°52' + k \cdot 180°\right\}$ d) $K = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{1}{2}\pi + 2k\pi\right\}$

Př. 15: Pro která x platí: $\sin x + \cos x > 0$?

Př. 16: Načrtni grafy funkcí.

a) $y = \sin x + \sin|x|$ b) $y = \cos x \sin x$ c) $y = 1 - \text{tg}\,\frac{x}{2}$

Shrnutí: